Abstract

In this report we introduce and then study a maximal operator $\mathcal{M}_{k,n}$ that generalizes the classical one introduced by Hardy and Littlewood in the rank one case. More precisely, for $k \geq 0$ and an integer $n \geqslant 1$,

$$\mathcal{M}_{k,n}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_{k,n}(]-r.r[)}\Big|\int_{\mathbb{R}} f(y)\tau_x^{k,n}(\chi_r;y)d\mu_{k,n}(y)\Big|,$$

where the measure $\mu_{k,n}$ is given by $d\mu_{k,n}(y) = |y|^{2k+\frac{2}{n}-2}dy$, and $\tau_x^{k,n}$ is a certain translation operator.

The main result is to prove the weak $(1,1)$ inequality and the strong (p,p) inequality for $\mathcal{M}_{k,n}$, with $1 < p \leq \infty$. The approach uses geometric and analytic tools. One of the major technical obstacles is the lack of known properties of the translation operator $\tau_x^{k,n}$. The strategy is to introduce an uncentered maximal operator associated to intervals of type $I(x,r) =]\max\{0, |x|^{\frac{1}{n}} - r^{\frac{1}{n}}\}^n, (|x|^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}})^n[$ which controls the maximal operator $\mathcal{M}_{k,n}$. To do so, one needs to prove a Vitaly type covering lemma for the intervals $\big\{I(x_j,r_j)\big\}_j$ together with a sharp estimate for $\mu_{k,n}(I(x_j,r_j))$. The main result generalizes the case $n=1$ proved by Deleaval, and the case $n=2$ proved by Ben Said and Deleaval.

Keywords: Hardy-Littlewood maximal operator, Generalized Fourier transform, Vitali type lemma, Strong and Weak type inequalities, Convolution structure, Translation operator.

Title and Abstract (in Arabic)

عن المعامل الأقصى لهاردي و ليتلوود

الملخص

في هذا التقرير، نقدم ثم ندرس المعامل الأقصى $(M_{k,n})$ الذي يعمم المعامل الكلاسيكي الذي قدمه هاردي وليتلوود في الحالة الأولى. بتعبير أدق، ل (N) أي عدد صحيح و (k) أي عدد أكبر أو يساوي الصفر،

$$M_{k,n}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_{k,n}(]-r,r[)} \left| \int_{\mathbb{R}} \tau_x^{kn}(\chi_r; y)\, d\mu_{k,n}(y) \right|,$$

حيث المقياس $(\mu_{k,n})$ يعطى بشكل $(d\mu_{k,n}(y) = |y|^{2k+\frac{2}{n}-2}\, dy)$ و (τ_x^{kn}) هو معامل تحويل معين. النتيجة الرئيسية هي إثبات المتباينة الضعيفة $(1,1)$ والمتباينة القوية (P,P) لـ $(1 < P \leq \infty)$. يستخدم النهج أدوات هندسية وتحليلية. تتمثل إحدى العقبات الرئيسية في عدم معرفة خصائص معامل التحويل (τ_x^{kn}). الاستراتيجية هي إدخال معامل أقصى غير مركزي مرتبط بفترات من النوع

$$I(x,r) = \left] \max\left\{0, \left(|x|^{\frac{1}{n}} - r^{\frac{1}{n}}\right)^n\right\}, \left(|x|^{\frac{1}{n}} + r^{\frac{1}{n}}\right)^n \right[$$

والذي يتحكم في المعامل الأقصى. للقيام بذلك، نحتاج إلى إثبات نظرية من نوع "Vitaly" للفترات $(\{I(x_j,y_j)\}_j)$ للوصول لتقدير دقيق لمقياس الفترات $(\mu_{k,n}\left(I(x_j,y_j)\right))$. النتيجة الرئيسية تعمم الحالة $(n=1)$ أثبتتها روسلر، والحالة $(n=2)$ أثبتتها بن سعيد وديليفال.

مفاهيم البحث الرئيسية: المعامل الأقصى لهاردي و ليتلوود، تحويل فورييه المعمم، نظرية فيتالي، معامل التحويل، المتباينات الضعيفة والقوية.